Chapitre 2

Espace vectoriel

2.1 Introduction au groupe

Définition 2.1. Une loi de composition interne sur un ensemble E est une appli cation de E × E dans E.

Exemple 2.2. (1) L’addition ou la multiplication sont des lois de composition internes sur N, Z, Q, R ou C.

(2) la soustraction définit une loi de composition interne sur Z, Q, R, ou C mais sur N.

(3) Le produit scalaire de deux vecteurs de Rd n’est pas une loi de composition interne si d ≥ 2.

(4) On note F(E,E) l’ensemble des applications de E dans E, l’application

F(E,E) × F(E,E) → F(E,E)

(f, g) $→ f ◦ g

(f ◦ g est défini par ∀x ∈ E, f ◦ g(x) = f(g(x))) est une loi de composition interne.

Définition 2.3. Un groupe est la donnée d’un ensemble G et d’une loi de composi tion interne notée ∗ suivante :

G × G → G

(x, y) $→ x ∗ y

telle que (G, ∗) vérifie les trois propriétés suivantes :

(1) (Elément neutre) Il existe e ∈ G tel que ∀x ∈ G, e ∗ x = x ∗ e = x. (2) (Associativité) Pour tout x, , y, z ∈ G, (x ∗ y) ∗ z = x ∗ (y ∗ z). (3) (Elément inverse) Pour tout x ∈ G, il existe x! ∈ G tel que x ∗ x! = x! ∗ x = e.

Si de plus, ∀x, y ∈ G, on a x ∗ y = y ∗ x,on dit que ∗ est commutative et (G, ∗) est un groupe commutatif ou abélien.

Remarque 2.4. On emploie aussi parfois le terme de symétrique au lieu de l’in verse.

9

2 . Espace vectoriel

Exemple 2.5. (1) Z, Q, R et C sont des groupes abéliens : 0 est l’élément neutre, l’inverse de x est −x. Notons que (N, +) n’est pas un groupe car la condition (3) de la définition 2.3 n’est pas vérifié.

(2) Q∗, R∗, C∗ munis de la multiplication sont des groupes : 1 est l’élément neutre. Il en est de même pour T, l’ensemble des nombres complexe de module 1. Si x est réel, alors l’inverse de x est 1x . Tout élément de C∗ possède un inverse pour la loi × :

∀z ∈ C∗, ∃z! ∈ C∗ | z × z! = z! × z = 1

(Si z = x + iy alors z! = x−iy

x2+y2 = 1z = z−1).

(3) Soit E un ensemble et soit S(E) l’ensemble des bijections de E sur E, soit ◦ la loi de composition interne définie par la composition de deux bijections. Montrer à titre d’exercice que (S(E), ◦) est un groupe et qu’il est non abélien et E a au moins trois éléments.

En particulier, pour n ∈ N, soit E = {1,...,n}. Alors S(E) est noté Sn. Sn est un groupe de cardinal n!. On l’appelle le groupe des permutations sur n éléments.

Proposition 2.6. (1) L’élément neutre est unique.

(2) L’inverse x! d’un élément x ∈ G est unique.

(3) L’inverse de l’inverese de x ∈ G est x, i.e (x!)! = x.

(4) Pour tout x, y ∈ G, (x ∗ y)! = y! ∗ x!.

(5) Pour tout x, y, z ∈ G, si x ∗ y = x ∗ z alors y = z.

Preuve:

(1) Soient e!, e ∈ G deux éléments neutres de G. En appliquant la propriété d’un élément neutre à e et e!, on obtient :



e! ∗ e = e ∗ e! = e,



e ∗ e! = e! ∗ e = e!.

Par conséquant e = e!.

(2) Soit x!! ∈ G tel que x!! ∗ x = x ∗ x!! = e. on a alors x” ∗ x ∗ x! = x! ce qui implique que x!! = x! (puisque x ∗ x! = e).

(3) Soit (x!)! l’inverse de l’inverse de x!, on a (x!)! ∗ x! = e. Puisque x ∗ x! = e et d’aprés la deuxième propriété de cette proposition, on a x = (x!)!. (4) On a

(x ∗ y) ∗ (y! ∗ x!) = x ∗ y ∗ y! ∗ x! = x ∗ x! = e

donc (x ∗ y)! = y! ∗ x!.

(5) On a

x! ∗ (x ∗ y) = x! ∗ (x ∗ z) =⇒ (x ∗ x!) ∗ y = (x ∗ x!) ∗ z =⇒ y = z. !

Notation : Soit (G, ∗) un groupe, on note souvent xy au lieu de x ∗ y, 1 au lieu de e et x−1 l’inverse de x, pour tout x ∈ G.

10

2.2 Espace vectoriel

2.2 Espace vectoriel

L’ensemble K désigne toujours R ou C.

Définition 2.7. On appelle K-espace vectoriel (ou espace vectoriel seu K) tout ensemble non vide E muni d’une loi de comoposition interne notée +

K × E → E

(λ, x) $→ λx

telles que :

(1) (E, +) est un groupe abélien.

(2) ∀λ, µ ∈ K, ∀x ∈ E, on a (λ + µ)x = λx + µx.

(3) ∀λ ∈ K, ∀x, y ∈ E, on a λ(x + y) = λx + λy.

(4) ∀λ, µ ∈ K, ∀x ∈ E, on a λ(µx)=(λµ)x.

(5) ∀x ∈ E, on a 1x = x.

Les éléments d’un espace vectoriel sont appelés vecteurs; et les éléments de K sont appelés scalaires.

Lorsqu’il n’y a pas de confusion, on dira espace vectoriel au lieu de K espace vectoriel.

Exemple 2.8. (1) L’ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel. (2) K est un K espace vectoriel.

(3) Soient E un K espace vectoriel et X un ensemble non vide quelconque. Consi dérons F(X, E) l’ensemble des applications de X dans E. Pour f, g ∈ F(X, E) et λ ∈ K, on définit f + g, λf ∈ F(X, E) par :

∀x ∈ X, (f + g)(x) := f(x) + g(x) et (λf)(x) := λ(f(x))

alors F(X, E) muni de ces lois est un K espace vectoriel.

(4) Sur R2, on définit les deux lois suivantes : pour (x, y),(x!, y!) ∈ R2 et λ ∈ R, (x, y)+(x!, y!) := (x + x!, y + y!) et λ(x, y) := (λx, λy)

alors R2 est un R-espace vectoriel.

(5) Plus généralement : Si E1, E2,...,En sont n espaces vectoriels, alors l’espace produit E := E1 ×E2 ×···×En est un espace vectoriel pour les lois suivantes : Pour tous (x1, x2,...,xn),(y1, y2,...,yn) ∈ E et λ ∈ K, on définit

(x1, x2,...,xn)+(y1, y2,...,yn)=(x1 + y1, x2 + y2,...,xn + yn) λ(x1, x2,...,xn)=(λx1, λx2,..., λxn).

(6) L’ensemble Pn[X] des polynômes de degré inférieur ou égal à n additionné du polynôme nul est un espace vectoriel.

Proposition 2.9. Pour tout λ, µ ∈ K et pour tout x, y ∈ E, on a : (1) λx = 0 ⇐⇒ λ = 0 ou x = 0.

(2) λ(x − y) = λx − λy.

(3) (λ − µ)x = λx − µx.

(4) (−λ)(−x) = λx.

11

2 . Espace vectoriel

2.3 Sous-espace vectoriel

Dans toute la suite l’ensemble E désignera un espace vectoriel sur K.

2.3.1 Définition

Définition 2.10. Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F possède les propriétés suivantes :

(1) 0 ∈ F ;

(2) ∀x, y ∈ F, x + y ∈ F. Autrement dit F est stable par l’addition ;

(3) ∀x ∈ F et ∀λ ∈ K, λx ∈ F. Autrement dit, F est stable par la multiplication par scalaire.

Remarque 2.11. Tout sous-espace vectoriel de E, est un espace vectoriel pour les lois induites par E.

Exemple 2.12. (1) Si E est un espace vectoriel, alors {0} et E sont des sous espaces vectoriel de E.

(2) Si E = R2, alors F = {(x, 0); x ∈ R} est un sous-espace vectoriel de E. De même, si (x0, y0) ∈ R2, alors F{(λx0, λy0); λ ∈ R} est un sous-espace vectoriel de E.

(3) L’ensemble F = {(x, y, z) ∈ R3 | z = 0} est un sous-esapce vectoriel de R3.

(4) H = {(x1,...,xn) ∈ Rn | x1 + ··· + xn = 0} est un sous-espace vectoriel de Rn. En effet Rn est un R-espace vectoriel de vecteur nul 0 = (0,..., 0). H ⊂ Rn et 0 = (0,..., 0) ∈ H car 0 + ··· +0=0. Soient λ, µ ∈ R et x = (x1,...,xn), y = (y1,...,yn) ∈ H. On a λx+µy = (λx1 +µy1,..., λxn +µyn). Or (λx1 + µy1) + ··· + (λxn + µyn) = λ(x1 + ··· + xn) + µ(y1 + ··· + yn)=0 car x1 + ··· + xn = y1 + ··· + yn = 0 puisque x, y ∈ H donc λx + µy ∈ H.

Corollaire 2.13. Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E (F ⊂ E). Si F vérifie les propriétés (1) et (2) suivantes alors F est un sous-espace vectoriel de E :

(1) F est non vide (F contient l’élément neutre de E).

(2) ∀(x, y) ∈ F × F, ∀(λ, µ) ∈ K × K, alors λx + µy ∈ F.

Exemple 2.14. Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de R2 : – {(x, y) ∈ R2 | x + y = 1} car ne contient par le vecteur nul ;

– {(x, y) ∈ R2 | xy = 0} car non stable par addition ;

– {(x, y) ∈ R2 | x + y ∈ Z} car non stable par produit extérieur.

Proposition 2.15. Soient E un espace vectoriel et E1,...,En des sous-espaces vectoriels de E, alors l’intersection F = $nk=1 Ei est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve:

Pour tout i, on a 0 ∈ Ei, donc 0 ∈ F. Soient x, y ∈ F et λ ∈ K alors pour tout i, on a λx + µy ∈ Ei donc λx + µy est dans l’intersection de tout les Ei. !

12

2.3 Sous-espace vectoriel

Remarque 2.16. La réunion de deux sous-espace vectoriels n’est pas en général un sous-espace vectoriel. En effet, si E = R2, les sous-ensembles E1 = {(x, y) ∈ R2 | x + y = 0} et E2 = {(x, y) ∈ R2 | x − y = 0} sont deux sous-espaces vectoriels de R2 mais E1 ∪ E2 n’est pas un sous-espace vectoriel (par exemple, soient x, y ∈ R∗, on a (x, −x) ∈ E1 et (y, y) ∈ E2 mais (x, −x)+(y, y) n’appartient ni à E1 ni à E2).

2.3.2 Combinaisons linéaires

Soit {x1,...,xp} une famille de vecteurs d’un espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme a1x1 +...apxp = %pk=1 akxk, où les ak ∈ R est appelé combinaison linéaire des vecteurs xk, k = 1 ...,p.

Remarque 2.17. On peut généraliser cette notion à une famille infinie de vecteurs, mais dans ce cas il faut que la suite des scalaires soit à support fini.

2.3.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie d’un es pace vectoriel

Soit A un sous-ensemble non-vide de l’espace vectoriel E. On note vect(A), l’en semble des combinaisons linéaires d’éléments de A. On a donc

vect(A) = {%a∈A λaa | (λa) est une famille de scalaires à support fini}.

Donc un élément x de E appartient à vect(A), si et seulement si, il existe x1,...,xn ∈ A et des scalaires λ1,..., λn, tels que : x = λ1x1 + ··· + λnxn.

Théorème 2.18. Soit A une partie d’un espace vectoriel E. vect(A) est l’unique sous-espace vectoriel de E vérifiant :

(1) A ⊂ vect(A),

(2) vect(A) est inclus dans tout sous-espaces vectoriels contenant A.

Le sous-espace vectoriel vect(A) se comprend comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant A, on l’appelle espace vectoriel engendré par A.

Corollaire 2.19. vect(A) est l’intersection de tous les sous-espaces vectoriel de E contenant A.

Corollaire 2.20. A est un sous-espace vectoriel, si et seulement si, vect(A) = A.

Exemple 2.21. (1) vect{ensemble vide} = {0} car l’espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de E.

(2) vect(E) = E car vectE est le plus petit sous-espace vectoriel contenant E.

(3) Soit A = {u}. Montrons que vect{u} = {λu | λ ∈ K} = Ku.

Puisque u ∈ A ⊂ vect(A) et puisque vect(A) est un sous-espace vectoriel on a λu ∈ vect(A), pour tout λ ∈ K. Ainsi Ku ⊂ vect{u}. Par double inclusion on obtient Ku = vect{u}.

(4) Soit A = {u, v}. Par double inclusion, on montre comme ci-desus que vect{u, v} = {λu + µv | λ, µ ∈ K} = Ku + Kv.

13

2 . Espace vectoriel

Proposition 2.22. Si A et B deux parties de E alors A ⊂ B =⇒ vect(B) ⊂ vect(A).

Preuve:

Supposons que A ⊂ B. On a alors A ⊂ vect(B) or vect(B) est un sous-espace vectoriel donc vect(A) ⊂ vect(B). !

Proposition 2.23. Si A et B sont deux parties de E alors vect(A∪B) = vect(A)+ vect(B).

Exemple 2.24. Pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E. vect(F∪G) = F+G. Ainsi F +G apparait comme étant le plus patit sous-espace vectoriel contenant F et G.

14

2.4 Feuille d’exercices-Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

2.4 Feuille d’exercices-Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Soit E un R-espace vectoriel.

On munit le produit cartésien E×E de l’addition usuelle : (x, y)+(x!, y!)=(x+x!, y+ y!) et de la multiplication externe ∗ par les complexes définie par : (a+i.b) ∗ (x, y) = (a.x − b.y, a.y + b.x).

Montrer que E × E est alors un C-espace vectoriel.

Celui-ci est appelé complexifié de E.

Exercice 2. Soit R∗+ muni de la loi interne définie par a ⊕ b = a.b, ∀a, b ∈ R∗+ et de la loi externe ⊗ telle que : λ ⊗ a = aλ, ∀a ∈ R∗+, ∀λ ∈ R.

Montrer que (R∗+, ⊕, ⊗) est un R-espace vectoriel.

Exercice 3. Sur R2, on définit les deux lois suivantes : pour tous (x, y),(x!, y!) ∈ R2 et ∀λ ∈ R, on pose

(x, y)+(x!, y!)=(x + x!, y + y!) et λ " (x, y)=(λx, 0).

Le triplet (R2, +, ") est-il un espace vectorielsur R ?

Exercice 4. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de R2 ? (a) {(x, y) ∈ R2 | x " y} ;

(b) {(x, y) ∈ R2 | xy = 0} ;

(c) {(x, y) ∈ R2 | x = y} ;

(d) {(x, y) ∈ R2 | x + y = 1}.

Exercice 5. Soient F = {(x, y, z) ∈ R3 | x+y−z = 0} et G = {(a−b, a+b, a−3b) | a, b ∈ R}.

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de R3.

(b) Déterminer F ∩ G.

Exercice 6. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de RN ? (a) {(un) ∈ RN | (un) bornée} ;

(b) {(un) ∈ RN | (un) monotone} ;

(c) {(un) ∈ RN | (un) convergente} ;

(d) {(un) ∈ RN | (un) arithmétique}.

Exercice 7. Soient u1,...,un des vecteurs d’un K-espace vectoriel E. Montrer que l’ensemble F = {λ1u1 +···+λnun | λ1,..., λn ∈ K} est un sous-espace vectoriel de E = vect(u1,...,un).

Exercice 8. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que F ∩ G = F + G ⇔ F = G.

Exercice 9. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d’un K-espace vectoriel E. Montrer que F ∪ G est un sous-espace vectoriel de E, si et seulement si, F ⊂ G ou G ⊂ F.

Exercice 10. Comparer vect(A ∩ B) et vect(A) ∩ vect(B).

Exercice 11. Soient A et B deux parties d’un K-espace vectoriel E. Montrer que vect(A ∪ B) = vect(A) + vect(B).

15

2 . Espace vectoriel

2.5 Applications linéaires

2.5.1 Définitions

Définition 2.25. Soient (E, +, .) et (F, .+) deux K-espaces vectoriels. On dit que f : E → F est linéaire (ou est un morphisme d’espace vectoriel) si : (1) ∀x, y ∈ E, on a f(x + y) = f(x) + f(y);

(2) ∀λ ∈ K, ∀x ∈ E, on a f(λx) = λf(x).

On note L(E,F) l’ensemble des applications de E dans F.

Proposition 2.26. [Caractérisation usuelle des applications linéaires] : Soit f : E → F. L’application f est linéaire, si et seulement si , ∀λ, µ ∈ K, ∀x, y ∈ E, f(λx + µy) = λf(x) + µf(y).

Exemple 2.27. Soit f : E → F définie par f : x $→ 0F . L’application f est linéaire.

Proposition 2.28. Soient E,E1,...En, (n ∈ N∗) des κ espaces vectoriels. L’appli cation

f : E → E1 × ··· × En

x $→ (f1(x),...,fn(x)).

f est linéaire de E dans E1 × ··· × En, si et seulement si, f1,...,fn sont des appli cations linéaires de respectivement de E dans E1,..., de E dans En.

Exemple 2.29. Montrons que f : R2 → R3 définie par f(x, y)=(x + y, x − y, 2y) est une application linéaire. Soient λ, µ ∈ R, et a = (x, y), b = (x!, y!) ∈ R2,

f(λa + µb) = f(λx + µx!, λy + µy!)

= (λx + µx! + λy + µy!, λx + µx! − λy + µy!, 2λy + 2µy!)

= λ(x + y, x − y, 2y) + µ(x! + y!, x! − y!, 2y!)

= λf(a) + µf(b).

Proposition 2.30. Soient (E, +, .), (F, +, .), (G, +, .) des K- espaces vectoriels. (1) Si l’application f : E → F est linéaire alors f(0E)=0F ;

(2) Si f : E → F et g : F → G sont linéaires alors g ◦ f : E → G est linéaire. (3) Si e1,...en sont des vecteurs de E alors ∀λ1,..., λn ∈ K, f(%nk=1

%akek) = n k=1 akf(ek).

2.5.2 Applications linéaires particulières

Formes linéaires

Définition 2.31. On appelle forme linéaire sur un K-espace vectoriel E, toute ap plication linéaire de E dans K. On note E∗, au lieu de L(E, K), l’ensemble des formes linéaires sur E.

Exemple 2.32. Pour a1,...,an ∈ K fixé, l’application f : Kn → K définie par f : (x1,...,xn) $→ a1x1 + ··· + anxn est une forme linéaire sur Kn. En effet, c’est une application de Kn vers K et c’est aussi une application linéaire car on vérifie aisement que ∀λ, µ ∈ K, ∀x, y ∈ Kn, on a f(λx + µy) = λf(x) + µf(y).

16

2.5 Applications linéaires

Endomorphisme

Définition 2.33. On appelle endomorphisme de E, toute applicatin linéaire de E dans lui même. On note L(E), au lieu de L(E,E), l’ensemble des endomorphismes de E.

Exemple 2.34. L’application identité IdE : E → E est un endomorphisme de E.

Proposition 2.35. Si f et g deux endomorphismes de E, alors f ◦ g est aussi un endomorphisme de E.

Isomorphisme

Définition 2.36. On appelle isomorphisme d’un K espace vectoriel E vers un K espace vectoriel F toute application linéaire bijective de E vers F. On note Iso(E,F) l’ensemble des isomorphismes de E dans F.

Exemple 2.37. L’application f : R2 → C définie par f(a, b) = a + ib est un isomorphisme de R-espace vectoriel. En effet, cette application est R-linéaire et bijective.

Proposition 2.38. Si f : E → F et g : F → G sont des isomorphismes alors la composée g ◦ f : f → G est un isomorphisme.

Proposition 2.39. Si f : E → F est un isomorphisme alors son application réci proque f −1 : F → E est un isomorphisme.

Exemple 2.40. L’application g : C → R2 définie par g : z $→ (3(z),Im(z)) est l’isomorphisme réciproque de l’application f : (a, b) ∈ R2 $→ a + ib ∈ C.

Automorphisme

Définition 2.41. On appelle automorphisme de E, toute application linéaire bijec tive de E. On note Gl(E) l’ensemble d’automorphisme de E.

Proposition 2.42. Si f : E → F et g : F → G sont des automorphismes alors la composée g ◦ f : f → G est un automorphisme.

Proposition 2.43. Si f : E → F est un automorphisme alors son application réciproque f −1 : F → E est un automorphisme.

2.5.3 Noyau et image d’une application linéaire

Théorème 2.44. Soit f : E → F une application linéaire. Si V est une sous-espace vectoriel de E alors f(V ) est un sous-espace vectoriel de F.

Si W est un sous-espace vectoriel de F alors f −1(W) est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 2.45. Soit f : E → F une application linéaire.

(1) On appelle image de f l’espace Im f = f(E).

(2) On appelle noyau de f l’espace ker f = f −1({0}).

17

2 . Espace vectoriel

Proposition 2.46. (1) Im f est un sous-espace vectoriel de F.

(2) ker f est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 2.47. (1) Pour déterminer l’image d’une application linéaire f, on détermine les valeurs prises par f, i.e., les y ∈ F tels qu’il existe x ∈ E pour lequel y = f(x).

(2) Pour déterminer le noyau d’une application linéaire f, on résout l’equation f(x)=0F d’inconnue x ∈ E.

Exemple 2.48. Déterminons le noyau et l’image de l’aaplication linéaire f : R2 → R2 définie par f : (x, y) $→ (x − y, x + y). Soit a = (x, y) ∈ R2. ..... ker f = {x, x) | x ∈ R}

Im f = {(x, −x) | x ∈ R}.

Théorème 2.49. Si f : E → F est une application linéaire alors

(1) f est surjective, si et seulement si, Im f = F

(2) f est injective, si et seulement si, ker f = {0E}.

Preuve:

!

2.6 Famille de vecteurs

2.6.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Soient E un K-espace vectoriel et F = (ei)1≤i≤n une famille finie de vecteurs de E.

Définition 2.50. On appelle combinaison linéaire des vecteurs de la famille F = (ei)1≤i≤n tout vecteurs x de E pouvant s’écrire x = %ni=1 λiei avec λ1,..., λn des scalaires de K bien choisis.

Définition 2.51. On appelle espace vectoriel engendré par la famille F = (ei)1≤i≤n, le sous-espace vectoriel engendré par la partie {e1,...,en}. On le note vect F, vect(ei)1≤i≤n ou vect(e1,...,en).

Exemple 2.52. Le sous-espace vectoriel engendré par la famille vide est l’espace nul {0}.

Théorème 2.53. Si (e1,...,en) est une famille de vecteurs de E alors vect(e1,...,en) est l’ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs e1,...,en, c’est-à-dire :

vect(e1,...,en) = {%ni=1 λiei | λ1,..., λn ∈ K}.

Exemple 2.54. (1) Cas n = 1, X(u) = {λu | λ ∈ K} = Ku.

(2) Cas n = 2, X(u, v) = {λu + µv | λ, µ ∈ K} = Ku + Kv.

(3) Dans R3, considérons u = (1, 1, 1), v = (0, −1, 2).

vect(u, v) = {(λ, λ + µ, 2µ) | λ, µ ∈ K}.

18

2.6 Famille de vecteurs

Remarque 2.55. Il est efficace d’établir qu’une partie est un sous-espace vectoriel en observant que celle-ci est engendrés par une famille de vecteurs.

Exemple 2.56. (1) Dans R3, considérons P = {(a + b, a − b, 2b) | a, b ∈ R}. Puisque P = vect(u, v), avec u = (1, 1, 0) et v = (1, −1, 2), P est un sous espace vectoriel de R3.

(2) Dans R3, considérons P = {(x, y, z) | x + y − z = 0}.

Puisque x + y − z = 0 ↔ z = x + y, on a P = vect((1, 0, 1),(0, 1, 1)). ainsi P est un sous-espace vectoriel de R3.

2.6.2 Famille génératrice

Définition 2.57. On dit qu’une famille F = (ei)1≤i≤n de vecteurs de E est généra trice de E, si tout vecteur x de E s’écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille F, c’est-à-dire :

∀x ∈ E, ∃(λ1,..., λn) ∈ Kn | x = λ1e1 + ··· + λnen = %ni=1 λiei.

Remarque 2.58. La famille F est génératrice de E, si et seulement si, vect(F) = E.

Exemple 2.59. (1) Dans E = Rn, on pose ei = (0,..., 1, 0 ..., 0) ∈ Rn où 1 se situe en ième position. La famille B = (ei)1≤i≤n est génératrice de Rn. En effet ∀x = (x1,...,xn) ∈ Rn, on peut écrire x = x1e1 + ··· + xnen.

(2) Dans E = R, la famille (1) est génératrice. En effet, x ∈ R, x = x.1. (3) Dans E = C vu comme R-espace vectoriel, la famille F = (1, i) est généra trice. En effet, pour tout z ∈ C, on peut écrire z = a.1 + b.i, avec a = 3(z) et b = Im(z).

Proposition 2.60. Si (e1,...,en, en+1) est une famille génératrice et si en+1 ∈ X(e1,...,en) alors la sous-famille (e1,...,en) est génératrice.

2.6.3 Famille libre, famille liée

Définition 2.61. Un vecteur u est dit colinéaire à un vecteur v de E s’il existe α ∈ K tel que u = αv. Deux vecteurs u et v sont dits colinéaires si l’un des deux est colinéaire à l’autre.

Attension

u est colinéaire à v n’équivaut pas à v est colinéaire à v. En effet, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteurs mais tout veceturs n’est pas colinéaire au vecetur nul.

Définition 2.62. (1) On dit que la famille (e1,...,en) de vecteurs de E est libre si elle vérifie ∀λ1,..., λn ∈ K, λ1e1 + ··· + λne = 0 → λ1 = ... λn = 0. On dit que les veceturs e1,...,en sont linéairement indépendants

(2) On dit que la famille (e1,...,en) est liée si elle n’est pas libre ce qui signifie ∃λ1, λn ∈ K, λ1e1 + ... λnen = 0 et (λ1,..., λn) 5= (0,..., 0). Une égalité λ1e1 +···+λnen = 0 avec λ1,..., λn non tous nuls est appelée relation linéaire sur les vecteurs e1,...,en.

19

2 . Espace vectoriel

Exemple 2.63. Soit u ∈ E, étudions la liberté de la famille (u). Si u 5= 0 alors ∀λ ∈ K, λu = 0 ⇒ λ = 0. Par suite, la famille (u) est libre.

Si u = 0 alors on peut écrire λu = 0 avec λ = 1 5= 0. Par suite, la famillle (0) est liée.

Proposition 2.64. Soient n ≥ 2 et (e1,...,en) une famille de vecteurs de E. On a équivalence entre :

(i) (e1,...,en) est liée ;

(ii) L’un des vecteurs e1,...,en est combinaison linéaire des autres.

Exemple 2.65. (1) Soient u, u ∈ E.

(u, v) est liée, si et seulement si, (∃α ∈ K, u = αv) ou (∃β ∈ K, v = βu). Ansi, la famille (u, v) est liée, si et seulement si, u et v sont colinéaires. (2) Dans E = R3, considérons les vecteurs u = (1, 2, 1), v = (1, −1, 1), w = (1, 1, 0) et la famille F = (u, v, w). Etudions la liberté de la famille F. Soient

α, β, γ ∈ R.



αu + βv + γw = 0



⇔ α + β + γ = 0 2α − β + γ = 0 α + β = 0.

Aprés résolution du système, on obtient αu + βv + γw = 0 ⇔ α = β = γ = 0, la famille F est donc libre.

(3) Dans E = R3, considérons les vecteurs u = (1, −1, 0), v = (2, −1, 1), w = (0, 1, 1) et la famille F = (u, v, w). Etudions la liberté de la famille F. Soient α, β, γ ∈ R.

αu + βv + γw = 0 ⇔

 

α + 2β = 0 −α − β = 0 β + γ = 0.

Aprés rsolution du système, on obtient αu + βv + γw = 0 ⇔

' α = −2β γ = −β.

On en déduit que la famille F est liée car on a notament la relation linéaire −2u + v − w = 0.

(4) Dans E = F(R, R), considérons les fonctions f : x $→ 1, g : x $→ cosx, h : x $→ sinx et montrons que la famille (f, g, h) est libre. Soient α, β, γ ∈ R Supposons αf + βg + γh = 0. Pour tout x ∈ R, on a α + βcosx + γsinx = 0. Pour x = 0, on obtient l’équation α + β = 0(1). Pour x = Π/2, on obtient l’équation α+γ = 0(2). Pour x = Π, on obtient l’équation αβ = 0(3). On a (1) et (3) donnent α = β = 0 et par (2) on obtient γ = 0. Finalement la famille (f, g, h) est libre.

Remarque 2.66. (1) Toute sous-famille d’une famille libre est libre.

(2) Toute sur-famille d’une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul est liée.

20

2.6 Famille de vecteurs

(3) Une sur-famille d’une famille libre n’est pas nécessairement libre.

Proposition 2.67. Si (e1,...,en) est une famille libre et si en+1 ∈/ vect(e1,...,en) alors la sur-famille (e1,...,en, en+1) est libre.

2.6.4 Base d’un espace vectoriel

Définition 2.68. On dit qu’une famille B = (ei)1≤i≤n = (e1,...,en) de vecteurs de E est une base de E si celle-ci est libre et génératrice.

Exemple 2.69. (1) Dans E = Kn, on pose ei = (1,..., 0, 1, 0,..., 0) ∈ Kn où 1 se situe en ième position. On a déja vu que B = (e1,...,en) est génératrice de Kn ; montrons qu’elle est libre. Soient λ1,..., λn ∈ K. Supposons que λ1e1 + ··· + λnen = 0. On a (λ1,..., λn) = (0,..., 0) et donc λ1 = ··· = λn = 0. Finalement , la famille B est libre et génératrice de Kn, c’est une base de Kn.

(2) Considérons la famille (1, i) déléments du R-espace vectoriel C. On a déja vu que cette famille est génratrice ; montrons qu’elle est libre. Soient λ, µ ∈ R. Supposons que λ.1 + µ.i = 0. En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient λ = µ = 0. Finalement, la base B est libre est génératrice du R-espace vectoriel C, c’est une base de C.

Remarque 2.70. La famille (1, i) est liée dans le C-espace vectoriel C. Elle n’est pas donc une base du C-espace vectoriel C.

2.6.5 Composante dans une base

Théorème 2.71. Si B = (ei)1≤i≤n est une base d’un K-espace vectoriel de E alors ∀x ∈ E, ∃!(λ1,..., λn) ∈ Kn, x = λ1e1 + ... λnen.

Définition 2.72. Avec les notations ci-dessous, les scalaires λ1,..., λn sont appelés les composants de x dans la base B (ou encore les composantes de x).

Remarque 2.73. Les composantes d’un vecteur dépendant de la base dans laquelle on travaille.

Exemple 2.74. (1) Dans E = Kn, considérons la base canonique B = (e1,...,en) et le vecteur x = (x1,...,xn). Puisque x = x1e1 + ··· + xnen, les composantes du vecteurs x dans la base B sont les saclaires x1,...,xn.

(2) Dans le R-espace vectoriel C, les composantes de z ∈ C dans la base canonique (1, i) sont 3(z) et Im(z)

Théorème 2.75. Si B = (ei)1≤i≤n est une base de E alors pour tout vecteur x et y de composantes x1,...,xn et y1,...,yn dans B, les composantes de x + y sont x1 + y1,...,xn + yn et celle de λx sont λx1,..., λxn. Ainsi l’application x ∈ E $→ xi ∈ K est une forme linéaire sur E.

21

2 . Espace vectoriel

2.7 Feuille d’exercices sur les applications linéaires, Famille libre, liée et base

2.7.1 Applications linéaires

Exercice 1 : Les applications entre R-espace vectoriels suivantes sont-elles linéaires :

(1) f : R3 → R définie par f(x, y, z) = x + y + 2z ;

(2) f : R2 → R définie par f(x, y) = x + y + 1 ;

[3) f : R2 → R définie par f(x, y, z) = xy ;

(4) f : R3 → R définie par f(x, y, z) = x − z ;

Exercice 2 : Soit f : R2 → R2 définie par f(x, y) → (x + y, x − y). Montrer que f est un automorphisme de R2 et déterminer son automorphisme réci proque.

Exercice 3 : Soit Φ : C∞(R, R) → C∞(R, R) définie par Φ(f) = f!! −3f! + 2f = 0. Montrer que Φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 4 : Soit E l’espace vectoriel des applications indéfinement dérivables sur R. Soient Φ : E → E et Ψ : E → E les applications définies par :

Φ(f) = f! et Ψ(f) est donnée par : ∀x ∈ R, Ψ(f)(x) = ( x0 f(t)dt. (a) Montrer que Φ et Ψ sont des endomorphismes de E.

(b) Exprimer Φ ◦ Ψ et Ψ ◦ Φ.

(c) Déterminer les images et les noyaux de Φ et de Ψ.

Exercice 5 : Soit f l’application linéaire d’un K-espace vectoriel E vers un K espace vectoriel F.

Montrer que pour toute partie A de E, on a f(vect(A)) = vect(f(A)). Exercice 6 : Soie E un K-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent, c’est-à-dire il existe n ∈ N∗ pour lequel f n = 0 et f n−1 5= 0. Montrer que Id −f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 7 : Soient E et F deux K-espaces vectoriels, f ∈ L(E,F) et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que f(A) ⊂ f(B) ⇐⇒ A + ker f ⊂ B + kerf.

2.7.2 Image et noyau d’un endomorphisme

Exercice 8 : Soient f et g deux endomorphismes d’un K-espace vectoriel E. Montrer que g ◦ f = 0, si et seulement si, Im(f) ⊂ ker(f).

Exercice 9 : Soient f et g deux endomorphismes d’un K-espace vectoriel E. (a) Comparer ker(f) ∩ ker(g) et ker(f + g);

(b) Comparer Im(f) + Im(g) et Im(f + g);

(c) Comparer ker(f) et ker(f 2);

(d) Comparer Im(f) et Im(f 2).

Exercice 10 : Soit f un endomorphisme d’un K-espace vectoriel E. Montrer que (a) Im(f) ∩ ker(f) ⇐⇒ ker(f) = ker(f 2);

(b) E = Im(f) + ker(f) ⇐⇒ Im(f) = Im(f 2).

22

2.7 Feuille d’exercices sur les applications linéaires, Famille libre, liée et base

2.7.3 Sous-espace engendré par une famille finie

Exercice 11 : On considère les vecteurs de R3 suivants u = (1, 1, 1) et v = (1, 0, −1).

Montrer que vect(u, v) = {(2α, α + β, 2β) | α, β ∈ R}.

Exercice 12 : Dans R3, on considère x = (1, −1, 1) et y = (0, 1, a) où a ∈ R. Donner une condition nécessaire et suffissante sur a pour que u = (1, 1, 2) appar tiennent à vect(x, y). Comparer alors vect(x, y), vect(u, x) et vect(u, y).

2.7.4 Famille libre

Exercice 13 : Les familles suivantes de R3 sont-elles libres ?

Si ce n’ai pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs : (a) (x1, x2) avec x1 = (1, 0, 1) et x2 = (1, 2, 2);

(b) (x1, x2, x3) avec x1 = (1, 0, 0), x2 = (1, 1, 0) et x3 = (1, 1, 1); (c) (x1, x2, x3) avec x1 = (1, 2, 1), x2 = (2, 1, −1) et x3 = (1, −1, −2); (d) (x1, x2, x3) avec x1 = (1, −1, 1), x2 = (2, −1, 3) et x3 = (−1, 1, −1);

Exercice 14 : On pose f1, f2, f3, f4 les fonctions définies par : f1(x) = cos x, f2(x) = x cos x, f3(x) = sin x et f4(x) = x sin x.

Montrer que la famille (f1, f2, f3, f4) est libre.

Exercice 15 : Pour tout entier 0 ≤ k ≤ n, on pose fk : R → R la fonction définie par : fk(x) = ekx.

Montrer que la famille (fk)0≤k≤n est une famille libre de F(R, R). Exercice 16 : Soit E un K-espace vectoriel et soient x, y, z trois vecteurs de E tel que la famille x, y, z) soit libre.

On pose : u = y + z, v = z + x et w = x + y.

Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

Exercice 17 : Soit E un K-espace vectoriel et (u1,...,un, un+1) une famille de vecteurs de E. Etablir :

(a) Si (u1,...,un) est libre et un+1 ∈/ vect(u1,...,un) alors (u1,...,un, un+1) est libre ;

(b) Si (u1,...,un, un+1) est génératrice et un+1in vect(u1,...,un) alors (u1,...,un) est génératrice.

Exercice 18 : Soit (x1,...,xn) une famille libre de vecteurs de E et α1,..., αn ∈ K. On pose u = α1x1 + ··· + αnxn et ∀1 ≤ i ≤ n, yi = xi + u.

A quelle condition sur les αi, la famille (y1,...,yn) est-elle libre ? Exercice 19 : Soit (a, b, c) ∈ R3. Les fonctions x $→ sin(x+a), x $→ sin(x+b), x $→ sin(x + c) sont-elles indépendantes ?

2.7.5 Obtention de base

Exercice 20 : On pose e1 = (1, 1, 1), e2 = (1, 1, 0), e3 = (0, 1, 1). Montrer que (e1, e2, e3) est une base de R3.

Exercice 21 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et B = (e1, e2, e3) une base de E.

On pose u = e1 + 2e2 + 2e3 et v = e2 + e3.

23

2 . Espace vectoriel

Montrer que la famille (u, v) est libre et compléter celle-ci en une base de E. Exercice 22 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et B = (e1, e2, e3) une base de E.

On pose u = e1 + 2e3 et v = e3 − e1 et w = e1 + 2e2.

Montrer que (u, v, w) est une base de E.

Exercice 23 : soi E un K-espace vectoriel muni de la base B = (e1,...,en). Pour tout i ∈ {1,...,n}, on pose ui = e1 + ...,ei.

(a) Montrer que B! = (u1,...,un) est une base de E ;

(b) Exprimer les composantes dans B! d’un vecteur de E en fonction de ces co moposantes dans B.

24

Chapitre 3

Matrices

3.1 Opérations sur les matrices

3.1.1 Définition

Définition 3.1. Soient n, p ∈ N∗. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans K, un tableau à n lignes et p colonnes d’éléments de K. On note une telle matrice

M = (aij ) 1≤i≤n 1≤j≤p =



a11 a12 ··· a1P

a21 a22 ··· a2p ... ... ... ...

an1 an2 ··· anp



.

– On dit que M est une matrice colonne si p = 1.

– On dit que M est une matrice ligne si n = 1.

– On dit que M est une matrice carrée si n = p.

Notations :

– On note Mn,p(K) l’ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans K.

– Si p = n, on note Mn(K) l’ensemble des matrices carrées à n lignes et à n colonnes.

– Un élément de Mn(K) est dite matrice carrée de taille n.

– Soit M = (aij ) 1≤i≤n 1≤j≤p

, alors aij est le coefficient situé sur la iième ligne et la

jième colonne de la matrice M.

Définition 3.2. Soit M = (aij )1≤i,j≤n une matrice carrée de taille n. On dit que :

(1) M est une matrice triangulaire supérieure (resp. strictement supérieure) si 25

3 . Matrices

aij = 0 pour tout i>j (resp. i ≥ j). C’est-à-dire :

M =



a11 a12 ··· a1n

0 a22 ··· a2n ... ... ... ...

0 ··· 0 ann



,(resp.M =



0 a12 ··· a1n

... ... ... ...

... ... an−1,n 0 ··· ··· 0



).

(2) M est une matrice inférieure (resp. strictement inférieure) si aij = 0 pour tout i<j (resp. i ≤ j). C’est-à-dire :

M =



a11 0 ··· 0

a21 a22 ··· 0 ... ... ... ...

an1 ··· an,n−1 ann



,(resp.M =



0 0 ··· 0

a21... ... ... ... ... 0

an1 ··· an,n−1 0



).

(3) M est une matrice diagonale si aij = 0 pour tout i 5= j. C’est-à-dire :

M =



a11 0 ··· 0

0 ... ... ... ... ... an−1,n−1 0 0 ··· ... ann



.

(4) M est symétrique (resp. antisymétrique) si aij = aji (resp. aij = −aji) pour tout 1 ≤ i, j ≤ n. C’est-à-dire :

M =



a11 a12 ··· a1n

a12 a22 ··· a2n ... ... ... ...

a1n a2n ··· ann



,( resp. M =



a11 a12 ··· a1n

−a12 a22 ··· a2n ... ... ... ...

−a1n −a2n ··· ann



).

Définition 3.3. Soit M = (aij ) 1≤i≤n 1≤j≤p ∈ Mn,p(K). On appelle transposée de M la matrice tM = (bij ) 1≤i≤p 1≤j≤n ∈ Mp,n(K) où bij = aij . C’est-à-dire :

tM ==



a11 a21 ··· an1

a12 a22 ··· an2 ... ... ... ...

a1p a2p ··· anp



.

Autrement dit, les n lignes de M sont les n colonnes de tM et les p colonnes de M sont les p lignes de tM.

Remarque 3.4. (1) Une matrice carrée M est symétrique, si et seulement si, M =t M.

(2) Une matrice carrée M est antisymétrique, si et seulement si, M = −tM. 26

3.1 Opérations sur les matrices

3.1.2 (Mn,p(K), +, .) est un K-espace vectoriel Opérations

Soit A = (aij ) 1≤i≤n 1≤j≤p ∈ Mn,p(K) et B = (bij ) 1≤i≤n 1≤j≤p ∈ Mn,p(K). On définit la matrice A+B ∈ Mn,p(K) de la façon suivante : A+B = (aij+bij ) 1≤i≤n 1≤j≤p ∈ Mn,p(K). Ainsi

A + B =



a11 a12 ··· a1P

a21 a22 ··· a2p ... ... ... ...



+



b11 b12 ··· b1P

b21 b22 ··· b2p ... ... ... ...

 



an1 an2 ··· anp

bn1 bn2 ··· bnp

a11 + b11 a12 + b12 ··· a1P + b1p

a21 + b21 a22 + b22 ··· a2p + b2p =

... ... ... ...

an1 + bn1 an2 + bn2 ··· anp + bnp



 .

Remarque 3.5. On ne somme que des matrices de même types.

Définition 3.6. Soit M = (aij ) 1≤i≤n 1≤j≤p ∈ Mn,p(K) et soit λ ∈ K. On définit la matrice λA de Mn,p(K) par λA = (λaij ) 1≤i≤n 1≤j≤p . Ainsi

λA =



λa11 λa12 ··· λa1P

λa21 λa22 ··· λa2p ... ... ... ...

λan1 λan2 ··· λanp



.

Théorème 3.7. (Mn,p(K), +, .) est un K-espace vectoriel d’élément nul 0=0Mn,p(K) = 

0 ··· 0 ... ··· 0 ··· 0

Dimension



 .

Définition 3.8. Soit 1 ≤ i ≤ n et 1 ≤ j ≤ p. On appelle matrice élémentaire d’indice (i, j) de Mn,p(K) la matrice Eij , dont tous les coefficients sont nuls sauf à la iième ligne et la jième colonne qui vaut 1.

Exemple 3.9. (1) Dans M2(K), les matrices élémentaires sont E11 =

/ 1 0 0 0

0

, E12 =

/ 0 1 0 0

0

, E21 =

/ 0 0 1 0

0

, E22 =

/ 0 0 0 1

0

.

27

3 . Matrices

(2) Dans Mn,1(K) les matrices élémentaires sont : 

E11 =



10... 0



,...,En1 =



0...0 1

.

Théorème 3.10. La famille B = (Eij , 1 ≤ i ≤ n, 1 ≤ j ≤ p) est une base de Mn,p(K).

Preuve:

∀X = (aij ) 1≤i≤n 1≤j≤p ∈ Mn,p(K), on a X = % 1≤i≤n 1≤j≤p aijEij . Donc B est une famille génératrice de Mn,p(K). Montrons maintenant que B est libre. Soient λij ∈ K,

1 ≤ i ≤ n et 1 ≤ j ≤ p, tel que % 1≤i≤n 1≤j≤p λijEij = 0Mn,p(K) et montrons que λij = 0, ∀1 ≤ i ≤ n et 1 ≤ j ≤ p. On a % 1≤i≤n 1≤j≤p λijEij = 0Mn,p(K) est équivalent à



λ11 ··· λ1p

... ...

λn1 ··· λnp



 =



0 ··· 0

... ...

0 ··· 0



 .

Par identification on obtient λij = 0, ∀1 ≤ i ≤ n, 1 ≤ j ≤ p. !

Corollaire 3.11. La dimension de l’espace vectoriel Mn,p(K) est mp. En particulier dimMn(K) = n2 et dimMn,1(K) = dimM1,n(K) = n.

Exemple 3.12. (1) Soient A1, A2, A3, A4 les matrices de M2(R) suivantes :

A1 =



1 0 0 1



 , A2 =



1 0 0 −1



 , A3 =



1 1 1 1



 , A4 =



0 −1 1 0



 .

Montrons que B = (A1, A2, A3, A4) est une base de M2(R). Nous remarquons que card(B) = 4 = dimM2(R). Donc pour que B soit une base de M2(R) il suffi que B soit libre sur M2(R). Soient λ1,..., λ4 ∈ R, tel que λ1A1 +λ2A2+ λ3A3+λ4A4 = 0. Montrons que λ1 = ··· = λ4 = 0. On a λ1A1+λ2A2+λ3A3+ λ4A4 = 0 est équivalent à



λ1 + λ2 + λ3 l3 − λ4 λ3 + λ4 λ1 − λ2 + λ3



 =



0 0 0 0



 .

Qui est équivalent à 

λ1 + λ2 + λ3 = 0, λ3 − λ4 = 0,

λ3 + λ4 = 0,

λ1 − λ2 + λ3 = 0.

On déduit facilement que λ1 = λ2 = λ3 = λ4 = 0. 28

3.1 Opérations sur les matrices

(2) Montrons que :

F = {



a + b −a + b 2a + b −a + 2b



 | a, b ∈ K}

est un sous-espace vectoriel de M2(K). On a

F = {

/ a −a 2a −a

0

+

/ b −b b 2b

0

| a, b ∈ K}

= {a

/ 1 −1 2 −1

0

+ b

/ 1 −1 1 2

0

| a, b ∈ K}

= vect(

/ 1 −1 2 −1

0

,

/ 1 −1 1 2

0

).

Par suite F est un sous-espace vectoriel de M2(K).

(3) Soit H = {

/ a b c d

0

| a + b + c + d = 0, ∀a, b, c, d ∈ K. Montrons que H est

un sous-espace vectoriel de M2(K). Soit f l’application suivante f : M2(κ) → K



a b c d



 $→ a + b + c + d.

Il est facile à vérifier que f est une application linéaire, c’est-à-dire, pour tous λ, β ∈ K, A, B ∈ M2(K) on a f(λA + βB) = λf(A) + βf(B). On a

ker f = {M ∈ M2(K) | f(M)=0}

= {

/ a b c d

0

| a + b + c + d = 0}

On remarque que ker f = H et on sait que le noyau d’une application linéaire est un sous-espace vectoriel. On déduit alors que H est un sous-espace vectoriel de M2(K).

3.1.3 Sous-espaces des matrices diagonales et triangulaires

Proposition 3.13. Dn(K) l’ensemble des matrices diagonales de Mn(K) est un sous-espace vectoriel de Mn(K) de dimension n.

Remarque 3.14. Une base de Dn(K) = {M ∈ Mn(K) | M = K} est B1 = (E11,...,Enn).



a11 0

...

0 ann



 , aij ∈

Proposition 3.15. (1) T≥n (K) (resp. T≤n (K)) est un sous-espace vectoriel de Mn(K) de dimension n(n+1)

2 .

29

3 . Matrices

(2) T>n (K) (resp. T<n (K)) est un sous-espace vectoriel de Mn(K) de dimension n(n−1) 2 .

Remarque 3.16. (1) T≥n (K) = vect(Eij , ∀1 ≤ i ≤ j ≤ n);

(2) T>n (K) = vect(Eij , ∀1 ≤ i<j ≤ n);

(3) T≤n (K) = vect(Eij , ∀1 ≤ j ≤ i ≤ n);

(4) T<n (K) vect(Eij , ∀1 ≤ j<i ≤ n).

Exercice Montrer que :

(1) T≥n (K) ⊕ T<n (K) = Mn(K);

(2) T≤n (K) ⊕ T>n (K) = Mn(K).

3.1.4 Propriétés du produit matriciel

Soient A = (aij ) 1≤i≤n 1≤j≤p ∈ Mn,p(K), B = (bij ) 1≤i≤p 1≤j≤q ∈ Mp,q(K). On définit la matrice C = A × B = AB = (cij ) 1≤i≤n 1≤j≤q ∈ Mn,q(K), par ∀1 ≤ i ≤ n, ∀1 ≤ j ≤ q,

cij = %pk=1 aikbkj .

Exemple Vérifier que pour tous Eij , Ekl ∈ Mn(K), on a EijEkl = δjkEil. Attention : Pour une cette multiplication matricielle soit possible il est necessaire que le nombre de colonnes de A soit egal au nombre de ligne de B. On peut retirer type(n,p)× type(p,q)=type(n,q).

Exemple 3.17.

/ 1 2 −1 1

0 / 10 0 2 1 −1

0

=

/ 1 × 1+2 × 2 0+2 × 1 0+2 × −1

0

−1 × 1+1 × 2 0+1 × 1 0+1 × −1

=

/ 5 2 −2 1 1 −1

0

Remarque 3.18. Si les types de A et B permettent de calculer AB et BA, alors en général on n’a pas AB = BA. Par exemple :



1 0 0 0



0 1 0 0

 

 



0 1 0 0



1 0 0 0



 =



 =



0 1 0 0



0 0 0 0



 .



 .

Proposition 3.19. (1) Pour tout A ∈ Mn,p(K), B ∈ Mp, q(K), C ∈ Mq,m, on a (AB)C = A(CB);

(2) pour tous A, B ∈ Mn,p(K) et C ∈ Mp, q(K), on a (A + B)C = AC + BC ; (3) pour tous A ∈ Mn,p(K) et B, C ∈ Mp, q(K), on a A(B + C) = AB + AC ; (4) Pour tout A ∈ Mn,p(K), B ∈ Mp, q(K), et pour tout λ ∈ K, on a λ(AB) = (λA)B = A(λB).

30

3.1 Opérations sur les matrices

Remarque 3.20. Dans l’ensemble des matrices Mn(K) des matrices carrées, la multilplications est une loi de composition interne. Elle admet comme élément neutre

la matrice diagonale

In =

Puissance d’une matrice



1 0

...

0 1



 .

Définition 3.21. Soit A ∈ Mn(K), on note A0 = In, A1 = A, A2 = A×A, . . . , Am = A × ··· × A (m termes).

Attension : (A + B)2 = A2 + AB + BA + B2 5= A2 + 2AB + B2. (A + B)3 = A3 + A2B + ABA + Ba2 + AB2 + BAB + B2.

Matrices inversibles

Définition 3.22. Une matrice A ∈ Mn(K) est dite inversible s’il existe B ∈ Mn(K) vérifiant AB = BA = In. Cette matrice B est alors unique, c’est l’inverse de A noté A−1.

Exemple 3.23. La matrice In est inversible et I−1 n = In.

Proposition 3.24. Soient A, B ∈ Mn(K).

(1) Si A et B sont inversibles alors (AB)−1 = B−1A−1.

(2) Si A est inversible alors A−1 est inversible et (A−1)−1 = A. Définition 3.25. On note GL(n)(K) l’ensemble des matrices inversibles de Mn(K). Proposition 3.26. (GL(n)(K), ×) est un groupe appelé groupe linéaire d’ordre n.

Exemple 3.27. Soit A =

/ 1 2 3 4

0

. On vérifie par le calcul que A2 − 5A = 2I2.

Par suite A( 12A − 52 I2) = I2. On conclut alors que A−1 = 12A − 52 I2.

Remarque 3.28. La somme de deux matrices inversibles n’est pas toujours une matrice inversible. Par example :



1 0 0 1



 +



 −1 0 0 −1



 =



0 0 0 0



 .

Détermination pratique de l’inverse d’une matrice carrée inversible

Lemme 3.29. Soient A, B ∈ Mn,p(K) si AX = BX, ∀X ∈ Mp,1(K) alors A = B. 31

3 . Matrices

Comment chercher l’inverse d’une matrice carrée A ∈ Gl n(K) : Soit

A = (aij ) 1≤i≤n 1≤j≤n ∈ GL(n)(K). On introduit X =



x1...



∈ Mn,1(K) et Y =



y1...



 = AX ∈ Mn,1(K). On a

xn

yn



y1... yn



 =



a11 ··· ann

... ...

an1 ··· ann

 



x1... xn



 .

Qui est équivalent à 

y1 = a11x1 + a12x2 + ··· + a1nxn ... ... ...

yn = an1x1 + an2x2 + annxn.

Si cela est possible, on résout ce système dont les inconnus sont x1,...,xn et on

obtient : 

x1 = b11y1 + b12y2 + ··· + b1nyn ... ... ...

xn = bn1y1 + bn2y2 + bnnyn.

(3.1)

Soit B = (bij ) 1≤i≤n 1≤j≤n ∈ GL(n)(K). Le système (3.1) est équivalent à X = BY . Ainsi InX = BAX, ∀X ∈ Mn,1(K), d’après le lemme 3.29 on a In = BA donc A−1 = B.

Exemple 3.30. Soit A =

 

011 101



 ∈ M3(R). Déterminons A−1 ? Soient X =









110



x1 x2 x2

 , Y =



y1

 ∈ M3,1(R), tel que Y = AX. On a :

y2

y3



 

y1 = x2 + x3 y2 = x1 + x3 y3 = x1 + x2

⇔

 

x2 = y1 − x3

x3 = 12 (y2 − y3 + y1) x1 = y3 − y1 + x3

⇔



x2 = 12 (y1 − y2 + y3) x3 = 12 (y1 + y2 − y3) x1 = 12 (−y1 + y2 + y3)

On déduit alors que A−1 = 12

 

−11 1 1 −1 1 1 1 −1



 .

3.2 Représentations matricielles

3.2.1 Matrice colonne des composantes d’un vecteur

Soit E un K-espace vectoriel muni d’une base B = (e1,...,en), ∀x ∈ E, ∃!(α1,..., αn) ∈ K, tel que x = α1e1 + ··· + αnen.

32

3.2 Représentations matricielles

Définition 3.31. On appelle matrice des composantes dans B du vecteur x la ma trice colonne de M1,n(K) telles que ses coefficients sont α1,..., αn, qui sont les

composantes de x dans la base B. On la note MatB(x) =



α1... αn



∈ Mn, 1(K).

Remarque 3.32. Puisque les composantes d’un vecteur dépend de la base choisie, il est necessaire de préciser la base.

Exemple 3.33. Soit le R espace vectoriel Rn muni de sa base canonique (e1,...,en).

On a : MatB(ei) =

 



0...

. Soit x = (1, 2, 3,...,n) ∈ Rn, on a MatB(x) =12...n .

0

1

0...0

3.2.2 Matrice des composantes d’une famille de vecteurs

Soit F = (x1,...,xp) une famille de vecteurs d’un K-espace vectoriel E muni d’une base B = (e1,...,en). Pour tout 1 ≤ i ≤ p notons ci la colonne des compo santes dans B du vecteur xi.

Définition 3.34. On appelle matrice des composantes dans la base B de la famille des vecteurs F la matrice de Mn,p(K) dont les colonnes sont c1,...,cp, on la note MatB(F) = MatB(x1,...,xp).

Remarque 3.35. Si p = 1, on retrouve la définition de la matrice des composantes du vecteur x1 dans la base B.

Exemple 3.36. (1) Soit E un K-espace vectoriel muni de la base B = (v1,...,vn).

On a

MatB(B) = MatB(v1,...,vn) =



1 0

...

0 1



 .

(2) Soit E = K3 muni de sa base canonique B = (e1, e2, e3) et soient F = (x1, x2, x3, x4), où x1 = (1, 2, 3), x2 = (−1, 5, 6), x3 = (4, 7, 9), x4 = (4, −6, −7).

MatB(F) = MatB(x1, x2, x3, x4) =



1 −14 4

257 −6 369 −7



 .

(3) Soit E = R3[X] muni de sa base canonique B = (1, X, X2, X3). Soient F = (P0, P1, P2, P3), P0 = (1 + X)0 = 1, P1 = (1 + X)1 =1+ X, P2 = (1 + X)2 =

33

3 . Matrices

1+2X + X2, P3 = (1 + X)3 =1+3X + 3X2 + X3. On a

MatB(F) =



1111

0123 0013 0001



.

3.2.3 Matrice d’une application linéaire

Soient E et F deux K-espaces vectoriels muni respectivement des bases B = (e1,...,en) et C = (v1,...,vp).

Définition 3.37. On appelle matrice representative dans les bases B et C d’une application linéaire u ∈ L(E,F) la matrices des composantes dans C de la famille image (u(e1),...,u(en)), on la note MatB,Cu = MatC(u(e1),...,u(en)) ∈ Mp,n(K). Remarque 3.38. La matrice représentative de u dépend du choix des bases B et C, il est donc necessaire de préciser ces derniers.

Exemple 3.39. (1) Soit u l’application linéaire suivante :

u : R3 → R2

(x, y, z) $→ (x + 2y − z, x − y).

On muni R3 de la base canonique B = (e1, e2, e3) (e1 = (1, 0, 0), e2 = (0, 1, 0), e3 = (0, 0, 1)) et soit C = (v1, v2) la base canonique de R2 (v1 = (1, 0), v2 = (0, 1)). Déterminons la matrice représentative de u dans les bases B et C. On a

u(e1) = (1, 1) = v1 + v2,

u(e2) = (2, −1) = 2v1 − v2,

u(e3)=(−1, 0) = −v1 + 0v2.

Donc

MatC(u(B)) =



1 2 −1 1 −1 0



 .

(2) Soient a, b ∈ R (fixés) et u l’application linéaire suivante :

u : R3[X] → R3

P $→ (P(a), P(b), P(c)).

On muni R3[X] de sa base canonique B = (P0 = 1, P1 = X, P2 = X2, P3 = X3) et on muni R3 de sa base canonique C = (e1, e2e3). Déterminons la matrice représentative de u dans les bases B et C. On a

u(P0) = (1, 1, 1) = e1 + e2 + e3,

u(P1)=(a, b, c) = ae1 + be2 + ce3,

u(P3)=(a2, b2, c2) = a2e1 + b2e2 + c2e3,

u(P3)=(a3, b3, c3) = a3e1 + b3e2 + c3e3.

34

On déduit que



3.2 Représentations matricielles 

MatC(u(B)) =

1 a a2 a3

1 b b2 b3 1 c c2 c3

 .

3.2.4 Matrice d’un endomorphisme

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et muni de la base B = (e1,...,en).

Définition 3.40. On appelle matrice représentative dans la base B d’un endomor phisme u ∈ L(E) la matrice représentative dans la base B au départ et à l’arrivée de u, on la note MatB,Bu = MatBu ∈ Mn(K).

Exemple 3.41. (1) Soient E un K-espace vectoriel muni d’une base B = (e1,...,en) et u = IdE l’identité de E. On a MatBu = In.

(2) Soit B = (e1, e1, e3) la base canonique de R3 et soit u l’endomorphisme sui vant :

u : R3 → R3

(x, y, z) $→ (x + z, z + x, x + y).

On a

u(e1) = (0, 1, 1) = e2 + e3,

u(e2) = (1, 0, 1) = e1 + e3,

u(e3) = (1, 1, 0) = e1 + e2.

Alors

MatB(u) =



011

101

110



 .

Soient v1 = (1, 1, 1), v2 = (1, 1, 0), v3 = (1, 0, 0), vérifions que B! = (v1, v2, v3) est une base de R3, pour cela il suffit de montrer que B! est libre, car card(B!) = dim R3 = 3. Soient α, β, γ ∈ R, tel que αv1 + βv2 + γv3 = 0R3 et montrons que α = β = γ = 0. On a αv1 + βv2 + γv3 = 0R3 est équivalent à

 

α + β + γ = 0 α + β = 0

α = 0

⇔

 

γ = 0 β = 0 α = 0

Donc B! est libre. Déterminons MatB"u. On a

u(v1) = (2, 2, 2) = 2v1,

u(v2) = (1, 1, 2) = 2v1 − v2,

u(v3) = (0, 1, 1) = v1 + v3.

35

3 . Matrices

Alors

MatB"(u) =

3.2.5 Image d’un vecteur



22 1

0 −1 0

0 0 −1



 .

Soient E et F deux K-espaces vectoriels munis des bases B = (e1,...,en) et C = (v1,...,vp). Pour x ∈ E et y ∈ F, par convention on note X et Y les deux colonnes de x et y dans les bases B et C.

Théorème 3.42. Pour u ∈ L(E,F), la matrice de u dans les bases B et C est l’unique matrice de Mp,n(K) vérifiant ∀x ∈ E, ∀y ∈ F, y = u(x) ⇔ Y = AX.

Exemple 3.43. Soirt E un R-espace vectoriel muni d’une base B = (e1, e2, e3). Soit u un endomorphisme de E dont la matrice dans B est

MatBu =



112

1 −1 0

101



 = A.

Soit x = x1e1 + x2e2 + x3e3 ∈ E. On peut calculer le vecteur u(x) par produit

matriciel.

MatBu(x) = AX =



x1 + x2 + x3

x1 − x2

x1 + x3



 .

On peut alors étudier le noyau de u en réslovant l’équation matricielle AX = 0M3,1(K).

AX = 0M3,1(K) ⇔

 

x1 + x2 + x3 = 0 x1 − x2 = 0

x1 + x3 = 0

⇔

 

x2 = x1, x3 = −x1.

Ainsi ker u = {x1(e1 + e2 − e3) | x1 ∈ K} = vect(e1 + e2 − e3).

On peut aussi facilement déterminer l’image de u.

En effet, par le théorème du rang, on a Rg u = dim E −dim ker u = 2. On peut donc déterminer une base de Im u.en considérant deux vecteurs libres de l’image de u. Or les colonnes de A sont formées par les composantes des vecteurs u(e1), u(e2) et u(e3), qui sont des éléments de l’image et puisque u(e1) = e1 + e2 + e3 et u(e2) = e1 − e2 sont libres alors Im(u) = vect(u(e1), u(e2)).

36

3.3 Formule de changement de base

3.2.6 Isomorphisme de représentation matricielle

Soient E et F deux K-espaces vectoriels munis de bases B = (e1,...,en) et C = (v1,...,vp).

Théorème 3.44. L’application

MB,C : L(E,F) → Mp,n(K)

u $→ MatB,Cu

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels.

Corollaire 3.45. Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies alors l’espace vectoriel L(E,F) est un K-espace vectoriel de dimension finie et dim L(E,F) = dim F × dim F. En particulier, dim L(E) = (dim E)2 et dim E∗ = dim K × dim E = dim E.

Remarque 3.46. Par l’isomorphisme de représentation matricielle, introduire une application linéaire u de E vers F équivaut à introduire sa représentation matricielle relative à des bases données de E et F. C’est trés souvent ainsi que sont introduit des applications linéaires en dimension finie.

3.2.7 Composition d’une application linéaire

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels munis des bases B = (e1,...,ep), C = (v1,...,vn) et D = (w1,...,wm).

Théorème 3.47. Pour tout u ∈ L(E,F) et v ∈ L(F, G), on a : MatB,D(v ◦ u) = MatC,Dv × MatB,Cu.

3.2.8 Isomorphisme et matrice inversible

Soient E et F deux K-espaces vectoriels munis dew bases B = (e1,...,ep) et C = (v1,...,vn).

Théorème 3.48. Soient u ∈ L(E,F) et A = MatB,Cu on a équivalence entre (1) u est un isomorphisme ;

(2) A est inversible.

De plus, MatC,B(u−1) = A−1.

3.3 Formule de changement de base

3.3.1 Matrice de passage

Soit E un K-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases B = (e1,...,en) et B! = (e!1,...,e!n).

Définition 3.49. On appelle matrice de passage de la base B à la base B! la matrice P = MatB(B!) = MatB(e!1,...,e!n).

37

3 . Matrices

Exemple 3.50. soit le R-espace vectoriel R3 muni de la base canonique B = (e1, e2, e3) et de la base B! = (e!1, e!2, e!3), où e!1 = e1 − e2 + e3, e!2 = e2 − e3 et e!3 = −2e1 + 2e2 − e3. La matrice de passage de la Base B à la base B! est

MatBB! =



1 0 −2

−11 2

1 −1 −1



 .

Proposition 3.51. Si P est la matrice de passage de la base B à la base B! alors P = MatB(IdE(B!)).

Attension : Ici la matrice de l’endomorphisme IdE n’est pas l’identité car la représentation matricielle de l’identité est formée en choississant une base à l’arrivée qui n’est a priori la même au départ.

Proposition 3.52. Si P est la matrice de passage de la base B à la base B! alors P est inversible et P −1 est la matrice de passage B! à la base B.

Exemple 3.53. Reprenons les notations de l’exemple précident.

 

e!1 = e1 − e2 + e3 e!2 = e2 − e3

e!3 = −2e1 + 2e2 − e3

et P = MatBB! =



1 0 −2

−11 2

1 −1 −1



 .

Pour former la matrice de passage inverse P −1, il suffit d’exprimer les vecteurs de la base B en fonction de ceux de la base B!. A l’aide du système précédent on obtient :

 

e1 = e!1 + e!2

e2 = 2e!1 + e!2 + e!3 e3 = 2e!1 + e!3

et donc P −1 = MatB"B =



122

110

011



 .

3.3.2 Nouvelle composante de vecteur

Théorème 3.54. Soient B et B! deux bases d’un K-espace vectoriel E de dimen sion n si x est un vecteur de E dont on note X et X! les colonnes des composantes dans B et B! de x alors on a X = MatBB!X!.

Remarque 3.55. On retient la formule suivante MatBx = MatBB! × MatB"x. Corollaire 3.56. X! = MatB"BX.

3.3.3 Nouvelle représenatation d’une application linéaire

Théorème 3.57. Soient B et B! deux bases d’un K-espace vectoriel E et C et C! deux bases d’un K-espace vectoriel F. Si f est une application linéaire de E vers F dont on note A = MatC(fB)) et A! = MatC"(f(B!)) alors on a A! = Q−1AP, où P est la matrice de passage de la base B à la base B! et Q est la matrice de passage de la base C à la base C!.

38

3.4 Rang d’une matrice

Remarque 3.58. On peut retrouver la formule du théorème 3.57 à l’aide du dia gramme commutatif suivant :

f

(E,B) (F, C)

.

On a :

IdE IdF

f

(E,B!) (F, C!)

IdF ◦f = f ◦ IdE ⇔ MatC" IdF (C)A = A!MatB" IdE(B)

⇔ A! = MatC" Idf (C)AMatB IdE(B!)

⇔ A! = Q−1AP.

3.4 Rang d’une matrice

3.4.1 Definition

Rappel : Si F = (x1,...,xn) est une famille de vecteurs d’un K-espace vectoriel E alors on appelle rang de la famille F la dimension de l’espace engendré par F. Rg F = dim vect(x1,...,xn).

Si E et F sont deux K-espaces vectoriels de dimensions finies et u ∈ L(E,F) alors on appelle rang de l’application linéaire u la dimension de Im u. C’est à dire : Rg u = dim Im u.

Ces deux concepts sont liés puisque si B = (e1,...,en) est une base de E alors Rg u = Rg(u(e1), u(e2),...,u(en)).

Définition 3.59. Soit A = (aij ) 1≤i≤n 1≤j≤p ∈ Mn,p(K) de colonnes C1,...,Cp. On ap pelle rang de A le rang de la famille (C1,...,CP ). On note Rg(A) = Rg(C1,...,Cp).

Théorème 3.60. Si F = (x1,...,xp) une famille de vecteurs d’un K-espace vecto riel E et si A est la matrice de la famille F dans une certaine bese B de E alors Rg(A) = Rg(x1,...,xp).

Théorème 3.61. Soient E et F deux K-espaces vectoriels. Si u ∈ L(E,F) et si A est la matrice de u relative à des bases B de E et C de F alors Rg(u) = Rg(A).

3.4.2 Propriétés du rang d’une matrice

Proposition 3.62. Pour tout A ∈ Mn,p(K), Rg(A) ≤ min(n, p).

Proposition 3.63. pour tous A ∈ n, p(K), B ∈ Mp,q(K), on a Rg(AB) ≤ min(Rg(A), Rg(B)). De plus

(a) Si A est une matrice carrée inversible alors Rg(AB) = Rg(B);

(b) Si B est une matrice carrée inversible alors Rg(AB) = Rg(A).

Remarque 3.64. On ne modifie pas le rang d’une matrice en multipliant celle-ci par une matrice inversible.

39

3 . Matrices

Théorème 3.65. Soit A ∈ Mn(K). On a équivalence entre : (i) A est inversible ;

(ii) Rg(A) = n.

Remarque 3.66. Pour tout A ∈ Mn,p(K), on a Rg(A) = Rg(tA). 40

3.5 Série d’exercices

3.5 Série d’exercices

Exercice 0 : On considère la matrice





(a) Calculer AtA ou tAA.

A =



2 −2 1

2 1 −2 12 2

(b) En déduire que A est inversible et donner l’expression de A−1. Exercice 1 : On considère la matrice





et on pose B = A − I3.

A =



111

011

001

Calculer Bn pour n ∈ N et en déduire l’expression de An. Exercice 2 : On considère la matrice

A =



 −1 −2 3 4

 

(a) Calculer A2 − 3A + 2I. En déduire que A est inversible et calculer son inverse. (b) Pour n # 2, déterminer le reste de la division euclidienne de Xn par X2 − 3X + 2.

(c) En déduire l’expression de la matrice An.

Exercice 3 : Soit A = bc)I2 = 0.

/ a b c d

0

∈ M2(K). Observer que A2 − (a + d)A + (ad −

A quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A−1. Exercice 4 : Calculer l’inverse des matrices carrées suivantes :

(a) A =

 



101 2 −1 1 −1 1 −1



 .

(b) B = (c) C =



 

1 1 −1 20 1 2 1 −1

2 01 −111 1 01



 . 

.

Exercice 5 : Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

41

3 . Matrices

(a)

f : R3 → R2

(x, y, z) $→ (x + y, y − 2x + z).

(b)

f : R3 → R3

(x, y, z) $→ (y + z, z + x, x + y).

(c)

f : R3[X] → R3[X]

P $→ P(X + 1).

(d)

f : R3[X] → R4

P $→ (P(1), P(2), P(3), P(4)).

Exercice 6 : On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de R3 sui vants :

P = {(x, y, z) ∈ R3 | x + 2y − z = 0} et D = Vect(w) où w = (1, 0, −1). On note B = (i, j, k) la base canonique de R3.

On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallè lement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

(a) Former la matrice de p dans B.

(b) En déduire les matrices, dans B, de q et de s.

Exercice 7 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et f ∈ L(E) tel que f 2 5= 0 et f 3 = 0.

Montrer qu’il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est



000

100

010



 .

Exercice 8 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n ∈ N#. Soit f un endomorphisme de E tel que f n = 0 et f n−1 5= 0.

(a) Justifier qu’il existe x ∈ E tel que B = (x, f(x), f 2(x),...,f n−1(x)) forme une base de E.

(b) Déterminer les matrices de f, f 2,...,f n−1 dans cette base. (c) En déduire que

{g ∈ L(E) | g ◦ f = f ◦ g} = vect(Id, f, f 2,...,f n−1).

42

3.5 Série d’exercices

Exercice 9 : Soit





A =

3 1 −3

−11 1

1 1 −1

 .

On note B = (e1, e2, e3) la base canonique de R3.

Soit f l’endomorphisme de R3 dont la matrice dans B est A. On pose ε1 = (1, 1, 1), ε2 = (1, −1, 0), ε3 = (1, 0, 1) et B! = (ε1, ε2, ε3). (a) Montrer que B! constitue une base de R3.

(b) Ecrire la matrice de f dans cette base.

(c) Déterminer une base de ker f et de Imf.

Exercice 10 : Soit E un K-espace vectoriel muni d’une base B = (i, j, k). Soit f l’endomorphisme de E dont la matrice dans B est

A =



2 −1 −1

1 0 −1 1 −1 0



 .

(a) Calculer A2. Qu’en déduire sur f ?

(b) Déterminer une base de Imf et ker f.

(c) Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de Imf et ker f ?

Exercice 11 : Soit

A =



2 −1 −1

−1 2 −1 −1 −1 2



 .

On note B = (e1, e2, e3) la base canonique de R3.

Soit f l’endomorphisme de R3 dont la matrice dans B est A.

(a) Déterminer ker f et Imf. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans R3.

(b) Déterminer une base adaptée à cette supplémentarité et écrire la matrice de f dans cette base.

(c) Décrire f comme composée de transformations vectorielles élémentaires. Exercice 12 Soit f ∈ L(R3) représenté dans la base canonique B par :



2 1 −1

01 0

11 0



 .

(a) Soit C = (ε1, ε2, ε3) avec ε1 = (1, 0, 1), ε2 = (−1, 1, 0), ε3 = (1, 1, 1). Montrer que C est une base.

43

3 . Matrices

(b) Déterminer la matrice de f dans C.

(c) Calculer la matrice de f n dans B pour tout n ∈ N.

Exercice 13 : Soit E un K-espace vectoriel muni d’une base B = (e1, e2, e3). Soit f l’endomorphisme de E dont la matrice dans B est

A =



2 −1 0

−2 1 −2 113



 .

Soit B! = (ε1, ε2, ε3) la famille définie par

ε1 = e1 + e2 − e3;

ε2 = e1 − e3;

ε3 = e1 − e2.

(a) Montrer que B! est une base de E et former la matrice D de f dans B!. (b) Exprimer la matrice de passage P de B à B! et calculer P −1. (c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P −1 ?

(d) Calculer An pour tout n ∈ N.

Exercice 14 : Soit E un K-espace vectoriel muni d’une base B = (e1, e2, e3). Soit f l’endomorphisme de E dont la matrice dans B est

A =



3 −2 2

120

111



 .

(a) Montrer qu’il existe une base C = (ε1, ε2, ε3) de E dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale D de coefficients diagonaux : 1, 2 et 3.

(b) Déterminer la matrice de passage P de B à C. Calculer P −1. (c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P −1 ?

(d) Calculer An pour tout n ∈ N.

Exercice 15 : Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3 et B = (e1, e2, e3) une base de E.

On considère les matrices

A =



4 −2 −2

1 0 −1 3 −2 −1



et D =



000

010

002



 .

Soit f l’endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est A. 44

3.5 Série d’exercices

(a) Montrer qu’il existe une base C = (ε1, ε2, ε3) de E telle que la matrice de f dans C soit D.

(b) Déterminer la matrice P de GL(3)(R) telle que A = PDP −1. Calculer P −1. (c) Calculer pour tout n ∈ N, An.

(d) En déduire le terme général des suites (xn)n∈N,(yn)n∈N et (zn)n∈N définies

par : 

x0 = 1, y0 = 0, z0 = 0,

et ∀n ∈ N,

 

xn+1 = 4xn − 2(yn + zn), yn+1 = xn − zn,

zn+1 = 3xn − 2yn − zn.

Exercice 16 : Calculer le rang de familles de vecteurs suivantes de R3 : (a) (x1, x2, x3) avec x1 = (1, 1, 0), x2 = (1, 0, 1) et x3 = (0, 1, 1). (b) (x1, x2, x3) avec x1 = (2, 1, 1), x2 = (1, 2, 1) et x3 = (1, 1, 2). (c) (x1, x2, x3) avec x1 = (1, 2, 1), x2 = (1, 0, 3) et x3 = (1, 1, 2).

Exercice 17 : Calculer le rang des applications linéaires suivantes : (a) f : K3 → K3, définie par f(x, y, z)=(−x + y + z, x − y + z, x + y − z). (b) f : K3 → K3 définie par f(x, y, z)=(x − y, y − z, z − x).

(c) f : K4 → K4 définie par f(x, y, z, t)=(x + y − t, x + z + 2t, 2x + y − z + t, −x + 2y + z).

Exercice 18 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d’une base B = {e1, e2, e3}. Soit λ ∈ R, on considère les vecteurs v1 = − e1−e2+e3, v2 = e1−λe2−e3 et v3 = e1 − e2 − λe3.

(a) Soit fλ l’application linéaire de E dans E, définie par

fλ(e1) = v1, fλ(e2) = v2, fλ(e3) = v3.

Déterminer la matrice Aλ de fλ dans la base B.

(b) Déterminer suivant les valeurs de λ le rang de fλ.

(c) Calculer, suivant les valeurs de λ, le noyau de fλ.

(d) Montrer que la matrice

P =



101

110

−1 −1 −1

 

est inversible et calculer son inverse.

(e) Monter que A0 = PBP −1, où

B =

En déduire que f 30 = f0.

45



00 0

01 0

0 0 −1



 .